INFORME DE LA PONENCIA

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

DISTRITO UNIVERSITARIO DE GRANADA

ENERO 2020

PONENTE

Domingo Gámez Domingo

domingo@ugr.es

Universidad de Granada

DIRECCIONES DE INTERÉS

ENLACES
DISTRITO ÚNICO ANDALUZ http://www.juntadeandalucia.es/economiaycono cimiento/sguit/?q=grados
COORDINACIÓN GENERAL DE ACCESO-UGR https://coga.ugr.es/pages/mayores

Distrito Único Andaluz

Mayores de 25 años

Calendario de la prueba

Prueba de Acceso para Mayores de 25 años

Proceso de Admisión

Temarios y exámenes de cursos anteriores

Normativa sobre acceso

- Normativa básica estatal (Real Decreto 412/2014)
- Acuerdo por el que se establece el ingreso a Grados - Curso 2019/2020
- Acuerdo sobre la organización de la prueba y temarios
- Acuerdo sobre historia de la filosofía
- Acuerdo sobre temario de historia de la filosofía

Enlaces de interés

Universidad de Granada

Rectorado de la Universidad de Granada

Vicerrectorado de Estudiantes y Empleabilidad

CReCES

Servicio de Alumnos

Distrito Único Andaluz

ESTADÍSTICA
CONVOCATORIA

ABRIL
2019

ALUMNOS PRESENTADOS

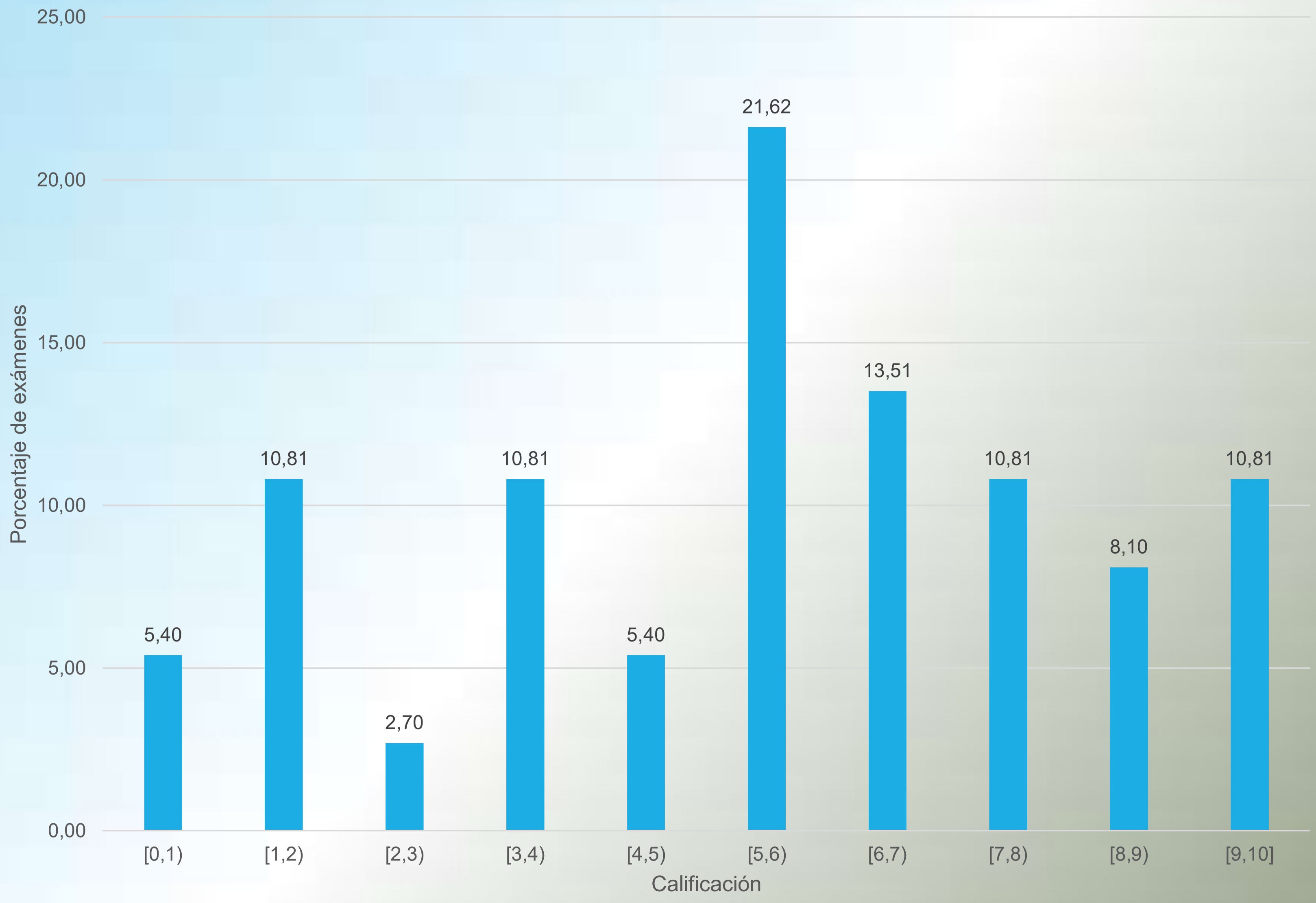
	Nº DE EXÁMENES
EXÁMENES TITULARES	**37**
EXÁMENES POR INCOMPATIBILIDAD HORARIA	**0**
TOTAL	**37**

CALIFICACIONES OBTENIDAS

	NOTA MEDIA EXAMEN	PORCENTAJE DE APROBADOS
EXAMEN TITULAR	5.33	64.87 %

Intervalo Calificaciones	Número de Alumnos
[0,1)	2
[1,2)	4
[2,3)	1
[3,4)	4
[4,5)	2
[5,6)	8
[6,7)	5
[7,8)	4
[8,9)	3
[9,10]	4

Distribución por calificaciones



FASE DE RECLAMACIONES

- Se solicitaron 2 reclamaciones (5.40%)
- No hubo alteración de calificación

CONVOCATORIA ÚNICA ORDINARIA

17 y 18 de abril de 2020

Primer Día: Fase General

16:30	**Citación y distribución de examinados/as**
17:00	Comentario de Texto
18:00	Descanso
18:30	Lengua Española
19:30	Descanso
20:00	Traducción de texto en lengua extranjera
21:00	Fin de la prueba

Segundo Día: Fase Específica

8.30	Citación y distribución de examinados/as
9:00	Biología Dibujo Artístico Dibujo Técnico Economía de la Empresa Física Geografía Historia de la Filosofía Historia General y del Arte Historia de la Música y Danza Latín Matemáticas Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales Química Tecnología Industrial
12:00	Fin de la prueba

No podrán usarse calculadoras programables, gráficas o con capacidad de almacenar o trasmitir datos; además, durante el examen no se permitirá el préstamo de calculadoras.

En cualquier caso, se advierte que todos los procesos que conduzcan a la obtención de resultados deben estar suficientemente razonados.

Estructura de la prueba de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales:

El examen constará de seis ejercicios debiendo el/la candidato/a responder únicamente a tres de ellos.

Recomendación para la elección:

Se leerá al completo el examen y se hará razonadamente la elección de los tres ejercicios (no se basará necesariamente en el orden de los ejercicios en el examen).

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

Tema 1. Números enteros, racionales e irracionales. Números reales.
1.1. Números enteros. Operaciones. 1.2. Múltiplos y divisores. Números primos y compuestos. 1.3. Números racionales. Operaciones. 1.4. Expresión decimal y fraccionaria. 1.5. Aproximaciones y errores. 1.6. Números irracionales. Radicales y potencias. 1.7. Radicales equivalentes. Operaciones con radicales. 1.8. Números reales. Operaciones. La recta real. 1.9. Intervalos y semirrectas. Notación científica.

Tema 2. Ecuaciones de primer y segundo grado. Sistemas de ecuaciones.
2.1. Igualdades, identidades y ecuaciones. Identidades notables. 2.2. Resolución de ecuaciones. Ecuaciones lineales. 2.3. Ecuaciones de segundo grado. 2.4. Inecuaciones de primer grado con una incógnita. 2.5. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Tema 3. Aritmética mercantil. Progresiones.
3.1 Sucesiones de números reales. 3.2 Progresiones aritméticas. 3.3 Progresiones geométricas. 3.4 Interés simple y compuesto.

Tema 4. Funciones elementales.
4.1 Concepto de función. Dominio. 4.2 Funciones lineales y cuadráticas. 4.3 Funciones de proporcionalidad inversa. 4.4 Funciones definidas a trozos. 4.5 Composición de funciones. Función inversa o recíproca. 4.6 Funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Tema 5. Límites de funciones. Continuidad.
5.1 Continuidad y discontinuidad. 5.2 Límite de una función en un punto. Propiedades. 5.3 Cálculo de límites. Límites de funciones polinómicas y racionales. 5.4 Continuidad de una función en un punto.

Tema 6. Cálculo de derivadas. Aplicaciones.
6.1 Variación media y variación instantánea de una función. 6.2 Derivada de una función. Interpretación geométrica. 6.3 Cálculo de derivadas. 6.4 Estudio de funciones: Dominio, simetrías, cortes, asíntotas. 6.5 Estudio de la monotonía y extremos de una función. 6.6 Representación gráfica de una función.

Tema 7. Estadística unidimensional: tablas, gráficos y parámetros estadísticos.
7.1 Frecuencias y tablas. 7.2 Representaciones gráficas. 7.3 Medidas de centralización, dispersión y simetría. 7.4 Cuartiles y percentiles. 7.5 Interpretación de los parámetros estadísticos.

Tema 8. Distribuciones estadísticas bidimensionales.
8.1 Distribuciones bidimensionales. 8.2 Cálculo de parámetros. 8.3 Nube de puntos. 8.4 Correlación. 8.5 Rectas de regresión. Estimación.

Tema 9. Introducción a la probabilidad.
9.1 Sucesos. Operaciones con sucesos. 9.2 Números combinatorios. 9.3 Probabilidad. 9.4 Probabilidad condicionada.

Tema 10. Distribuciones de probabilidad. Variable discreta.
10.1 Función de probabilidad. 10.2 Función de distribución. 10.3 Distribución binomial. 10.4 Cálculo de probabilidades en una distribución binomial.

Tema 11. Distribuciones de probabilidad. Variable continua.
11.1 Distribuciones de probabilidad de variable continua. 11.2 Distribución normal. Manejo de la tabla de la función de distribución N(0,1). 11.3 Cálculo de probabilidades en distribuciones normales. Tipificación.

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS**	**MATEMÁTICAS APLICADAS CC.SS.** **CURSO 2018/2019**

Instrucciones:
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Debe elegir tres de los seis ejercicios propuestos.
- c) Cada ejercicio se puntuará de 0 a 10. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.
- d) Identifique claramente los ejercicios elegidos. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente.
- e) Puede usar calculadora (no programable) solo para las operaciones numéricas. No olvide que los procesos conducentes a la obtención de los resultados deben ser suficientemente justificados.

Ejercicio 1. a) (4 puntos) Simplifique la siguiente expresión:

$$2\sqrt{8}+7\sqrt{72}-6\sqrt{18}+\sqrt{128}-3\sqrt{50}$$

b) (6 puntos) Se lanzan dos dados y se suman sus caras superiores. Calcule la probabilidad de los sucesos: "la suma es 8" y " la suma es múltiplo de 2".

Ejercicio 2. a) (5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ x\leq 2 \\ x^2+ax+9 & si\ x>2 \end{cases}$

Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=2$. Para ese valor de a ¿es derivable en $x=2$?

b) (5 puntos) Al cabo de 6 años, el capital obtenido a un tanto de interés compuesto anual asciende a 17235€. Si el capital inicial fue 12500€, ¿cuál es el tipo de interés anual? , ¿qué intereses se generaron durante los tres primeros años?

Ejercicio 3. a) (4 puntos) Resuelva la ecuación:

$$(2x+1)^2-(2x+1)(2x-1)=(x-1)^2+6x$$

b) (6 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x} \qquad y \qquad g(x)=e^{3x}+\sqrt{x^2+1}$$

Ejercicio 4. a) (4 puntos) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

b) (6 puntos) La siguiente tabla proporciona el número de minutos dedicados a la lectura y el número de páginas leídas al día por 6 adultos:

Minutos	8	10	11	12	16	13
Páginas	4	5	6	10	15	10

Calcule la recta de regresión que permite predecir el número de páginas leídas a partir de los minutos dedicados a la lectura. Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprételo. ¿Cuántas páginas se estima que lea un adulto en 15 minutos?

Ejercicio 5. a) (4 puntos) El segundo término de una progresión geométrica es 3 y el quinto término es 24. Calcule la razón y la suma de los diez primeros términos.

b) (6 puntos) La probabilidad de que un vendedor realice una venta en una visita a un cliente es $p=0.2$. En un día determinado realiza 8 visitas a sus clientes. Se pide:

- **b1)** Probabilidad de que en esas 8 visitas realice al menos una venta.
- **b2)** Probabilidad de que ese día realice 3 ventas.

Ejercicio 6. a) (4 puntos) Resuelva la siguiente inecuación: $3x+1>\frac{2+4x}{3}-(2x-4)$

b) (6 puntos) El peso de los adultos que viven en una barriada es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media 75 kg y desviación típica 3 kg. Se elige un adulto al azar de esa barriada. Se pide:

- **b1)** Probabilidad de que pese menos de 78 kg.
- **b2)** Probabilidad de que pese entre 69 y 81 kg.

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS**	**MATEMÁTICAS APLICADAS CCS** **CURSO 2018/201**

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Ejercicio 1:
- a) Hasta 4 puntos.
- b) Hasta 3 puntos por cada probabilidad.

Ejercicio 2
- a) Hasta 3 puntos por la constante y hasta 2 puntos por la derivabilidad.
- b) Hasta 3 puntos por el interés anual y hasta 2 puntos por los intereses.

Ejercicio 3
- a) Hasta 4 puntos.
- b) Hasta 3 puntos por cada derivada.

Ejercicio 4
- a) Hasta 4 puntos.
- b) Hasta 4 puntos por la recta, hasta 1 punto por el coeficiente y hasta 1 punto por la estimación.

Ejercicio 5
- a) Hasta 2 puntos por la razón y hasta 2 puntos por la suma.
- b) Hasta 3 puntos por cada probabilidad.

Ejercicio 6
- a) Hasta 4 puntos.
- b) Hasta 3 puntos por cada probabilidad.

PRUEBAS DE ACCESO

A LAS UNIVERSIDADES

DE ANDALUCÍA

PARA MAYORES DE 25 AÑOS

EXÁMENES PROPUESTOS Y RESUELTOS DE

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

CONVOCATORIAS DE 2010-2011-2012-2013

F. Jiménez Gómez

Depósito Legal: GR 961-2013

Índice

Presentación:

Desde el año 1995 se viene realizando un examen común en todas las Universidades de Andalucía para el acceso a éstas de los alumnos mayores de 25 años que quieren optar por esta opción.

De acuerdo con la normativa vigente, a partir de 1 de enero de 2010, el alumno elige entre cinco vías, según la titulación a la que desea acceder después de haber superado la prueba, pues cada una de estas vías está vinculada a unas determinadas titulaciones. En concreto:

Vía A: Artes y Humanidades
Vía B: Ciencias
Vía C: Ciencias de la Salud
Vía D: Ciencias Sociales y Jurídicas
Vía E: Ingeniería y Arquitectura.

En la vía D está incluida como materia de examen, en la fase específica, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

En este manual están contenidos los exámenes de esta materia propuestos en los años 2010 a 2013, ambos inclusive, con sus correspondientes soluciones. En cada examen, al alumno se le proponen 6 ejercicios de los que deberá elegir, para resolver, 3 de ellos.

Este texto es una continuación de dos anteriores: el que en 2003 editó la editorial Proyecto Sur de Ediciones, que contenía los exámenes propuestos desde 1995 hasta 2002 y del editado en 2010 por la Universidad de Cádiz, que contenía los propuestos desde 2003 a 2009.

El autor, como en los textos precedentes, pretende que esta recopilación pueda ser de utilidad para preparadores y alumnos que opten al acceso a las Universidades de Andalucía por esta opción. En la resolución de estos ejercicios se utilizan procedimientos que, obviamente, no tienen por qué ser únicos.

Francisco Jiménez Gómez
Ponente de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Universidad de Granada

Granada, mayo de 2013

ENUNCIADOS Y RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES EN LAS CONVOCATORIAS DE 2010, 2011, 2012,2013

Francisco Jiménez Gómez

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2010 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice y simplifique la fracción $\dfrac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$.

b) (5 puntos) Determine los coeficientes de la ecuación $3x^2-ax+b=0$ para que sus soluciones sean los valores 3 y -2.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) En una progresión aritmética de 20 términos el primero es 5 y el décimo 32. Halle su razón y la suma de sus primeros 20 términos.

b) (5 puntos) Un banco concedió a una empresa un préstamo, a un interés compuesto del 6% durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3382.25 euros. ¿Qué capital prestó el banco a esa empresa?

EJERCICIO 3

a) (2 puntos) Represente la gráfica de la función $y=-2x+5$.

b) (3 puntos) Represente gráficamente la función $y=(2-x)\cdot(x+1)-2$.

c) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

EJERCICIO 4

a) (6 puntos) Dada la función $f(x)=x-\dfrac{3}{x+2}$ estudie si tiene asíntotas verticales u horizontales y represente las que existan. Determine también las regiones de crecimiento y decrecimiento de esta función.

b) (4 puntos) Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 12?

EJERCICIO 5

Una cooperativa aceitera quiere realizar un estudio sobre la influencia de las campañas publicitarias en sus cifras de ventas. Para ello dispone del gasto destinado a publicidad y del volumen de ventas en los últimos 5 años (ambos en miles de euros):

X : gasto en publicidad	2.5	2.8	2.9	3.1	3.5
Y : ventas	200	221	230	239	248

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuál será el volumen de ventas si la inversión en publicidad ascendiera a 3.8 miles de euros?

b) (5 puntos) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

EJERCICIO 6

a) (5 puntos) En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Asimismo, el 35% de las personas de esa ciudad son hombres mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?

b) (5 puntos) En un colegio se estudia la distribución de la nota de Matemáticas de sus estudiantes, resultando ser una Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2. Se elige al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál será la probabilidad de que su nota en esta asignatura sea mayor que 7.5?

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2010

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice y simplifique la fracción** $\dfrac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$**.**

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción anterior por el conjugado del denominador obtenemos:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{18-8}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{10}=$$

$$=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{5}=\frac{\sqrt{2\cdot 3^2}-\sqrt{2\cdot 2^2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

b) (5 puntos) **Determine los coeficientes de la ecuación** $3x^2-ax+b=0$ **para que sus soluciones sean los valores 3 y** -2**.**

Como 3 y -2 son soluciones de la ecuación dada han de satisfacerla, es decir que al sustituir x por 3 y por -2 la igualdad debe cumplirse; por tanto:

$$3\cdot 3^2-a\cdot 3+b=0$$
$$3\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b=0.$$

Operando, queda

$$\left.\begin{array}{l}27-3a+b=0\\ 12+2a+b=0\end{array}\right\}\rightarrow$$ se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Restando ambas ecuaciones:

$$15-5a=0\rightarrow 15=5a\rightarrow a=\frac{15}{5}=3\rightarrow b=-27+3a=-18.$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **En una progresión aritmética de 20 términos el primero es 5 y el décimo 32. Halle su razón y la suma de sus primeros 20 términos.**

Sabemos que en una progresión aritmética se cumplen las siguientes igualdades:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

donde d es la diferencia, o razón de la progresión.
Particularizando las expresiones anteriores a nuestro caso, tendríamos:

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d \rightarrow 32 = 5 + 9d \rightarrow 9d = 27 \rightarrow d = 3$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

Calculemos a_{20}:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 5 + 19 \cdot 3 = 5 + 57 = 62$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(5+62) \cdot 20}{2} = \frac{67 \cdot 20}{2} = 670$$

b) (5 puntos) **Un banco concedió a una empresa un préstamo, a un interés compuesto del 6% durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3382.25 euros. ¿Qué capital prestó el banco a esa empresa?**

La fórmula del interés compuesto cuando el tiempo, *n*, viene expresado en años es:

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

siendo *r* el tanto por ciento anual, rédito, al que se concede el préstamo.

Desconocemos el capital prestado C_0, pero sabemos que el capital final, C_n, la cantidad a devolver al banco, es la suma del capital prestado más los intereses devengados, es decir $C_5 = C_0 + 3382.25$.

Sustituyendo en la fórmula general:

$$C_0 + 3382.25 = C_0\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \rightarrow C_0 + 3382.25 = C_0 \cdot 1.06^5 \rightarrow 1.06^5 C_0 - 1 \cdot C_0 = 3382.25$$

$$1.338225578C_0 - 1C_0 = 3382.25 \rightarrow 0.338225578C_0 = 3382.25 \rightarrow$$

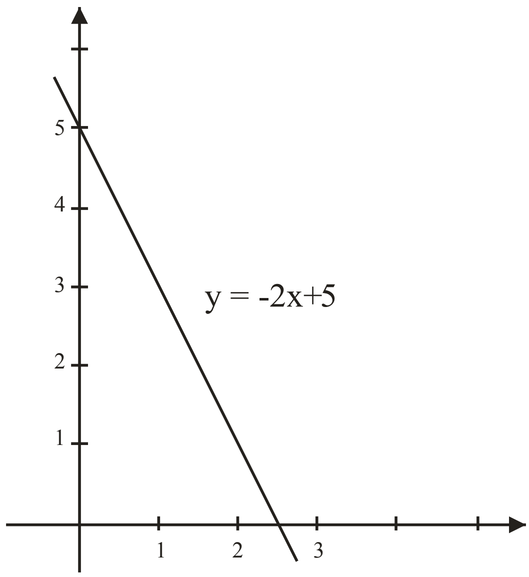
$$\rightarrow C_0 = \frac{3382.25}{0.338225578} \cong 10000$$

En consecuencia, el préstamo ascendía a 10000 euros.

EJERCICIO 3

a) (2 puntos) **Represente la gráfica de la función** $y = -2x + 5$ **.**

La función anterior corresponde, gráficamente, a una recta. Para representarla es suficiente conocer dos puntos de ella, en particular los puntos donde corta a los ejes de coordenadas; éstos se obtienen así:
$x = 0 \rightarrow y = 5$; es decir, el punto (0, 5), punto donde la recta corta al eje de ordenadas, es un punto de la recta.
$y = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$; es decir, el punto (2.5, 0), punto donde la recta corta al eje de abscisas, es un punto de la recta.
La representación gráfica sería:



b) (3 puntos) **Represente gráficamente la función** $y = (2 - x)\cdot(x + 1) - 2$.

Efectuando las operaciones indicadas en la expresión anterior quedaría:

$$y = -x^2 + x + 2 - 2 = -x^2 + x.$$

La función anterior, polinómica de grado 2, corresponde gráficamente a una parábola. Para representarla es suficiente conocer el vértice y los puntos donde corta a los ejes de coordenadas.
Cálculo del vértice: Al ser el coeficiente de x^2 negativo, indica que la parábola es cóncava, el vértice está hacia arriba, es un máximo. La abscisa del vértice se obtiene derivando e igualando a 0:

$$y' = -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} = 0.5$$

Para calcular la ordenada del vértice sustituimos este valor de x, 0.5, en la función y obtenemos $y = -0.5^2 + 0.5 = -0.25 + 0.5 = 0.25$
Es decir, el vértice de la parábola, máximo de la función, es el punto de coordenadas $(0.5, 0.25)$.

Corte al eje de ordenadas:

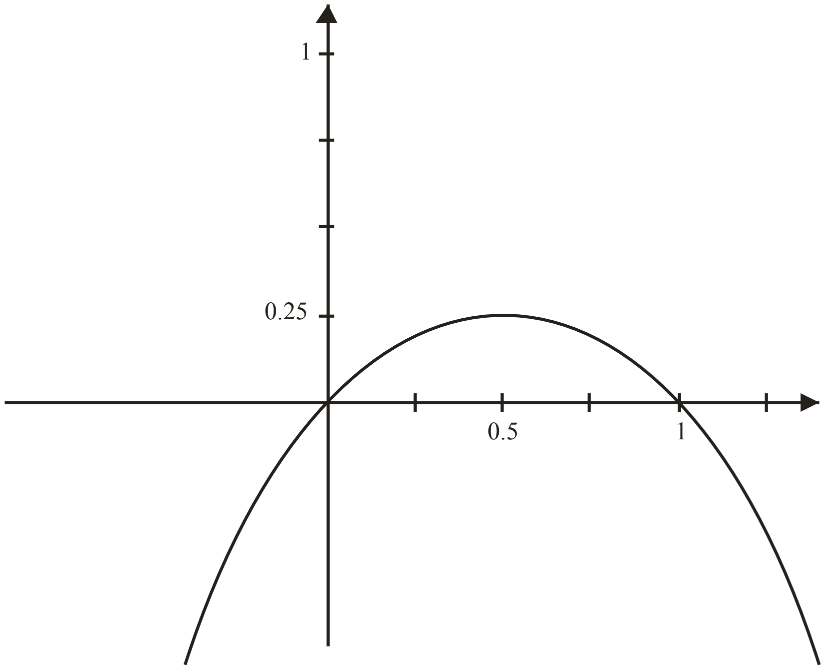
$x = 0 \rightarrow y = 0.$ Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 0), origen de coordenadas.

Corte al eje de abscisas:

$y = 0 \rightarrow -x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x+1) = 0 \rightarrow x = 0,$ ó $-x+1 = 0 \rightarrow x = 0,$ ó $x = 1.$

Corta al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (1, 0).

Con los datos obtenidos es inmediato dibujar la gráfica:



c) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x^2+1}.$

Hay que tener en cuenta que se trata de derivar una suma en la que el primer sumando es una raíz cuadrada y el segundo es un cociente; por tanto

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

EJERCICIO 4

a) (6 puntos) **Dada la función** $f(x) = x - \dfrac{3}{x+2}$ **estudie si tiene asíntotas verticales u horizontales y represente las que existan. Determine también las regiones de crecimiento y decrecimiento de esta función.**

Expresemos la función anterior como una función racional, efectuando, para ello, la diferencia

$$f(x) = x - \frac{3}{x+2} = \frac{x^2+2x-3}{x+2}.$$

Las asíntotas verticales son rectas con ecuación de la forma $x = k$, siendo k un valor tal que $\lim\limits_{x\to k} f(x) = \infty$. En nuestro caso esta condición se cumple cuando $k = -2$, por tanto la recta de ecuación $x = -2$ es una asíntota vertical.

Las asíntotas horizontales son rectas con ecuación de la forma $y = h$, siendo h un valor tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = h$. En nuestro caso $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x+2} = \infty$, por lo que no hay asíntota horizontal.

Las asíntotas oblicuas son rectas cuya ecuación es de la forma $y = mx+n$, siendo m un valor dado por $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

En nuestro caso $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2+2x-3}{x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x(x+2)}$=1.

En cuanto a n viene dado por $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$.

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-3}{x+2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-3-x^2-2x}{x+2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3}{x+2}\right] = 0.$$

En consecuencia, la asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = x$.

La representación gráfica de las asíntotas equivale, por tanto, a la representación gráfica de dos rectas cuyas ecuaciones son $x = -2$, recta perpendicular al eje de abscisas por el punto $(-2, 0)$ e $y = x$, que es la bisectriz del 1º y 3º cuadrante.

La función es creciente en aquellos puntos donde la primera derivada es positiva, es decreciente en los puntos donde esta derivada es negativa; por tanto habrá que calcular la derivada de esa función y estudiar el signo de ésta:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x+2)-(x^2+2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+6x+4-x^2-2x+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}$$

El denominador de esta fracción, por ser un cuadrado, toma siempre valores positivos (exceptuamos el valor 0, cuando $x=-2$ donde la función no es continua), por tanto el signo de la fracción será el que tome el numerador.

Tratemos de expresar en forma de producto el numerador; para ello calculemos sus raíces:

$$x^2+4x+7=0 \rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-28}}{2}$$

Al resultarnos la raíz de un número negativo, que no existe en el conjunto de los números reales, podemos concluir que la parábola correspondiente a la representación gráfica de la función del numerador no corta al eje de abscisas por lo que los valores de la función son, para cualquier valor de x positivos ó negativos, en nuestro caso positivo. En conclusión la función es creciente en todo su dominio, es decir en el conjunto

$$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty).$$

b) (4 puntos) **Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 12?**

El espacio muestral, resultados posibles, estaría formado por las siguientes 36 parejas de resultados:

$$E=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),\end{array}\right\}$$

Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad de obtenerse, es decir se trata de resultados equiprobables, por lo que la probabilidad de que se realice uno cualquiera de ellos vale $\frac{1}{36}$.

Nos piden la probabilidad de que la suma de las caras sea 12; esta suma sólo se presenta cuando se obtiene el resultado (6,6), por tanto la probabilidad de que la suma sea 12 es igual que la probabilidad de que se obtenga (6, 6), o sea $\frac{1}{36}$.

EJERCICIO 5

Una cooperativa aceitera quiere realizar un estudio sobre la influencia de las campañas publicitarias en sus cifras de ventas. Para ello dispone del gasto destinado a publicidad y del volumen de ventas en los últimos 5 años (ambos en miles de euros):

X : gasto en publicidad	2.5	2.8	2.9	3.1	3.5
Y : ventas	200	221	230	239	248

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál será el volumen de ventas si la inversión en publicidad ascendiera a 3.8 miles de euros?

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene por expresión

$$y-\bar{y}=r\frac{s_y}{s_x}\left(x-\bar{x}\right) \text{, ó también } \quad y-\bar{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}\left(x-\bar{x}\right)$$

donde r es el coeficiente de correlación lineal, que viene definido así $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_x}$,

$s_{xy}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\bar{x}\cdot\bar{y}$ es la covarianza, $s_x^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$ es la varianza de la variable X, s_x, desviación típica de la variable X, es la raíz cuadrada de la varianza s_x^2, y, por último, $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ es la media aritmética de la variable X.

Dispongamos los cálculos necesarios en forma de tabla:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\cdot y_i$	y_i^2
	2.5	200	6.25	500	40000
	2.8	221	7.84	618.8	48841
	2.9	230	8.41	667	52900
	3.1	239	9.61	740.9	57121
	3.5	248	12.25	868	61504
Sumas $\rightarrow$	14.8	1138	44.36	3394.7	260366

$$\bar{x}=\frac{14.8}{5}=2.96\,;\quad \bar{y}=\frac{1138}{5}=227.6\,;\quad s_x^2=\frac{44.36}{5}-2.96^2=8.872-8.7616=0.1104$$

$$s_x=\sqrt{0.1104}\cong 0.332\,;\quad s_y^2=\frac{260366}{5}-227.6^2=52073.2-51801.76=271.44\,;$$

$$s_y=\sqrt{271.44}\cong 16.475\,;\quad s_{xy}=\frac{3394.7}{5}-2.96\cdot 227.6=678.94-673.696=5.244$$

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es

$$y - 227.6 = \frac{5.244}{0.1104}(x - 2.96)$$

ó en forma explícita $y = 47.5x + 87$.
La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable Y (venta obtenida) para valores de la variable X (inversión en publicidad).

En concreto, si se invierte en publicidad 3.8 miles de euros, x = 3.8, la venta estimada sería

$$y = 47.5 \cdot 3.8 + 87 = 180.5 + 87 = 267.5 \text{ miles de euros.}$$

b) (5 puntos) **Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_x} = \frac{5.244}{0.332 \cdot 16.475} = \frac{5.244}{5.47406} \cong 0.9579$$

Del valor del coeficiente de correlación lineal hay que tener en cuenta dos aspectos: su signo y su valor absoluto (el recorrido de valores de r va desde -1 a +1).

El signo nos indica si la relación es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) ó inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) pero no nos indica si la relación es intensa o débil.

La relación entre las dos variables, directa o inversa, es más fuerte cuanto más próximo a 1 es el valor absoluto de r y más débil cuanto más se acerque a 0.

En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más gasto en publicidad más venta) muy intensa.

EJERCICIO 6

a) (5 puntos) **En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Asimismo, el 35% de las personas de esa ciudad son hombres mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?**

La representación, mediante la siguiente tabla, de la distribución de las personas de esa ciudad nos facilita la resolución.

	mujeres	hombres	totales
mayores	40%	35%	75%
menores	15%	10%	25%
totales	55%	45%	100%

El número de cada celdilla representa el porcentaje de personas que cumplen, simultáneamente, la condición de la fila (mayor o menor) y columna (mujer u hombre) en la que se encuentra dicho número.

Por consiguiente, la probabilidad de que sea mujer sabiendo que es mayor de edad es de $\frac{40}{75} = 0.53$.

b) (5 puntos) **En un colegio se estudia la distribución de la nota de Matemáticas de sus estudiantes, resultando ser una Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2. Se elige al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál será la probabilidad de que su nota en esta asignatura sea mayor que 7.5?**

Sabemos que si la variable *X*, nota de Matemáticas de los alumnos de ese colegio, se distribuye según una ley Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2, $X \to N(7.2,1.2)$, la variable $\frac{X-7.2}{1.2}$ se distribuye según una variable Normal tipificada, *Z*, es decir *N*(0,1), cuyos valores vienen tabulados. Por lo tanto vamos a pasar de la variable *X* a la *Z*.

Nos preguntan la probabilidad de que la variable *X* tome valores mayores que 7.5, es decir

$$P(X > 7.5) = P(X - 7.2 > 7.5 - 7.2) = P(\frac{X-7.2}{1.2} > \frac{0.3}{1.2}) = P(Z > 0.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013.$$

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2011 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice las expresiones $\dfrac{3}{4\sqrt{3}-3}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{27}}$.

b) (5 puntos) Halle el conjunto de soluciones de la inecuación

$$3(x-2) \le \frac{4-2x}{3}.$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) Calcule las derivadas de las funciones

$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{3x} \quad \text{y} \quad g(x) = (x^2 - x)(x^3 + 2x).$$

b) (5 puntos) Halle el valor de la constante *a* para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6 & \text{si} \quad x < 3 \\ \dfrac{12}{x} - a & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales y estudie si es derivable en x=3 para ese valor de a.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halle la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.

b) (5 puntos) Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4% anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6424.22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.

EJERCICIO 4

En la corrección de errores tipográficos de un texto se han encontrado 22 páginas con 1 solo error en cada una, 9 páginas con 2 errores en cada una, 6 páginas con 3 errores en cada una, 3 páginas con 4 errores en cada una, 2 páginas con 5 errores en cada una y ningún error en las 58 páginas restantes.

a) (4 puntos) Construya las tablas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas de la distribución del número de errores por página en este texto.

b) (6 puntos) Halle la media y la desviación típica del número de errores por página en dicho texto.

EJERCICIO 5

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) (3 puntos) Describa el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) (3 puntos) Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

c) (4 puntos) Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

EJERCICIO 6

El peso de las manzanas que se producen en una huerta sigue una ley Normal de media 150 gramos y una desviación típica de 20 gramos.

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de estas manzanas tendrá un peso inferior a 115 gramos?

b) (5 puntos) Halle la probabilidad de que una manzana, elegida al azar en este huerto, tenga un peso que se encuentre entre 165 y 220 gramos.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2011

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice las expresiones** $\dfrac{3}{4\sqrt{3}-3}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{27}}$**.**

$$\frac{3}{4\sqrt{3}-3}=\frac{3\cdot\left(4\sqrt{3}+3\right)}{\left(4\sqrt{3}-3\right)\cdot\left(4\sqrt{3}+3\right)}=\frac{12\sqrt{3}+9}{\left(4\sqrt{3}\right)^2-3^2}=\frac{12\sqrt{3}+9}{16\cdot 3-9}=\frac{12\sqrt{3}+9}{39}=\frac{4\sqrt{3}+3}{13}$$

$$\frac{2}{\sqrt{27}}=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{27}}=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{27^2}}=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{27}=\frac{2\cdot\sqrt{3^2\cdot 3}}{27}=\frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{27}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

b) (5 puntos) **Halle el conjunto de soluciones de la inecuación** $3(x-2)\leq\dfrac{4-2x}{3}$.

$$3(x-2)\cdot 3\leq\frac{4-2x}{3}\cdot 3\rightarrow\ 9(x-2)\leq 4-2x\rightarrow 9x-18\leq 4-2x\rightarrow 9x+2x\leq 18+4\rightarrow$$

$$\rightarrow 11x\leq 22\rightarrow\frac{11x}{11}\leq\frac{22}{11}\rightarrow x\leq 2\,.$$

Se puede expresar el conjunto solución, de forma equivalente, así $\left(-\infty,2\right]$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **Calcule las derivadas de las funciones**

$$f(x)=\frac{(2-x)^2}{3x}\quad \text{y}\quad g(x)=\left(x^2-x\right)\left(x^3+2x\right).$$

$$f\,'(x)=\frac{2\cdot(2-x)\cdot(-1)\cdot 3x-3\cdot(2-x)^2}{(3x)^2}=\frac{(4-2x)\cdot(-3x)-3\cdot\left(4-4x+x^2\right)}{9x^2}=$$

$$=\frac{-12x+6x^2-12+12x-3x^2}{9x^2}=\frac{3x^2-12}{9x^2}=\frac{3\cdot\left(x^2-4\right)}{3\cdot 3x^2}=\frac{x^2-4}{3x^2}.$$

$$g'(x)=(2x-1)\cdot\left(x^3+2x\right)+\left(x^2-x\right)\cdot\left(3x^2+2\right)=$$

$$=2x^4+4x^2-x^3-2x+3x^4+2x^2-3x^3-2x=$$

$$=5x^4-4x^3+6x^2-4x.$$

b) (5 puntos) **Halle el valor de la constante *a* para que la función**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6 & \text{si} \quad x < 3 \\ \dfrac{12}{x} - a & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales y estudie si es derivable en *x*=3 para ese valor de *a*.

Para que sea continua la función en $x = 3$ debe cumplirse $9a - 6 = 4 - a \to a = 1$.

Para que sea derivable debe cumplirse $2 \cdot 3$ sea igual a $-\dfrac{12}{9}$, lo que, evidentemente, no es cierto, por lo que la función no es derivable en $x = 3$.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halle la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.**

Notemos por a_1, a_4, S_{25}, el primer término, cuarto término y la suma de los 25 primeros términos, respectivamente, de esa progresión aritmética y sea *d* la diferencia o razón de la progresión.

En una progresión aritmética se verifican las siguientes relaciones:

$$a_4 = a_1 + (4-1) \cdot d \qquad S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2}$$

Sustituyendo los datos conocidos en la 1ª igualdad:

$$39 = 30 + 3d \to 39 - 30 = 3d \to d = \frac{9}{3} = 3$$

Calculemos a_{25}, término necesario para calcular la suma de los 25 primeros términos:

$$a_{25} = a_1 + (25-1)d = 30 + 24 \cdot 3 = 30 + 72 = 102$$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(30 + 102) \cdot 25}{2} = \frac{132 \cdot 25}{2} = 1650$$

b) (5 puntos) **Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4% anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6424.22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.**

$$C_F = C_I\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = C_I\left(1+\frac{4}{100}\right)^4 = 6424.22$$

$$C_I\left(1+\frac{4}{100}\right)^4 = 6424.22 \rightarrow C_I(1.04)^4 = 6424.22$$

$$1.1698 \cdot C_I = 6424.22 \rightarrow C_I = \frac{6424.22}{1.1698} \cong 5491.72$$

Los intereses producidos son la diferencia entre el capital final obtenido, 6424.22 euros, y el capital inicial desembolsado, 5491.72, es decir: 6424.22 − 5491.72=932.5 euros.

EJERCICIO 4

En la corrección de errores tipográficos de un texto se han encontrado 22 páginas con 1 solo error en cada una, 9 páginas con 2 errores en cada una, 6 páginas con 3 errores en cada una, 3 páginas con 4 errores en cada una, 2 páginas con 5 errores en cada una y ningún error en las 58 páginas restantes.

a) (4 puntos) **Construya las tablas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas de la distribución del número de errores por página en este texto.**

Del enunciado se desprende que la variable estadística, X, que se estudia es "número de errores por página". Esta variable toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 puesto que hay páginas en las que hay 0 errores, páginas en las que hay 1 error, así sucesivamente hasta páginas con 5 errores.

El número de páginas que hay con 0 errores, que es 58, es la frecuencia absoluta del valor 0; la frecuencia absoluta del valor 1 es 22 y así sucesivamente.

En consecuencia la tabla estadística correspondiente sería

Nº de errores: X	Nº páginas: frecuencia absoluta, n_i	Frecuencia Relativa f_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	58	$\frac{58}{100} = 0.58$	0	0
1	22	$\frac{22}{100} = 0.22$	22	22
2	9	$\frac{9}{100} = 0.09$	18	36
3	6	$\frac{6}{100} = 0.06$	18	54
4	3	$\frac{3}{100} = 0.03$	12	48
5	2	$\frac{2}{100} = 0.02$	10	50
Sumas $\rightarrow$	**100**	**1**	**80**	**210**

b) (6 puntos) **Halle la media y la desviación típica del número de errores por página en dicho texto.**

Las dos últimas columnas de la tabla anterior disponen los cálculos previos para determinar la media aritmética, $\bar{x}$, la varianza, s^2, y la desviación típica, s.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{210}{100} - 0.8^2 = 2.1 - 0.64 = 1.46$$

$$s = \sqrt{1.46} \cong 1.21.$$

EJERCICIO 5

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) (3 puntos) **Describa el espacio muestral de este experimento aleatorio.**

Teniendo en cuenta que el espacio muestral consta de los resultados posibles del experimento aleatorio y denotando por "r" extraer bola roja, "b" blanca y "n" negra y teniendo en cuenta que cada resultado sería una pareja de bolas en un determinado orden, tendríamos como espacio muestral:

r r, r b, r n, b r, b b, b n, n r, n b

b) (3 puntos) **Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.**

Puesto que hay 2 bolas rojas en un total de 6, si extraemos una bola, la probabilidad de que esta sea roja es $\frac{2}{6} \cong 0.33$.

c) (4 puntos) **Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.**

Es la suma de la probabilidad de extraer r r con la probabilidad de extraer b b, es decir:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}\cong 0.27$$

EJERCICIO 6

El peso de las manzanas que se producen en una huerta sigue una ley Normal de media 150 gramos y una desviación típica de 20 gramos.

a) (5 puntos) **¿Qué porcentaje de estas manzanas tendrá un peso inferior a 115 gramos?**

Sea X la variable aleatoria "peso de las manzanas producidas en la huerta". Si X sigue una ley Normal de media 150 y desviación típica 20, la variable $\frac{X-150}{20}=Z$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1.

Teniendo en cuenta lo anterior, la probabilidad de que esa variable X tome valores inferiores a 115 viene dada por

$$P(X<115)=P\left(\frac{X-150}{20}<\frac{115-150}{20}\right)=P(Z<-1.75)=P(Z>+1.75)=$$

$$=1-P(Z\leq 1.75)=1-0.9599=0.0401\equiv 4.01\%.$$

b) (5 puntos) **Halle la probabilidad de que una manzana, elegida al azar en este huerto, tenga un peso que se encuentre entre 165 y 220 gramos.**

$$P(165 < X < 220) = P\left(\frac{165-150}{20} < \frac{X-150}{20} < \frac{220-150}{20}\right) =$$

$$= P(0.75 < Z < 3.5) = P(Z < 3.5) - P(Z < 0.75) = 0.99977 - 0.7734 = 0.22637.$$

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2012 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice y simplifique la fracción $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

b) (5 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{x}{3+x^2},\quad g(x)=x(\ln x-1).$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) La ecuación de segundo grado $x^2+px+7=0$ tiene la solución $x=-1$. Determine p y la otra solución de la ecuación.

b) (5 puntos) Sean A y B dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son $P(A)=0.25$ y $P(B)=0.35$.
Calcule $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(A^C\cap B)$.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) Calcule $4^{-1}+\dfrac{3}{5}\left(2-\dfrac{5}{3}\right)$ y $\dfrac{3}{4}:\dfrac{9}{2}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-1}$.

b) (5 puntos) Determine el valor del parámetro a para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+3x+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sea continua en x=1. Para a=0, determine los vértices de cada una de las parábolas.

EJERCICIO 4

a) (5 puntos) Resuelva el sistema lineal $\begin{cases} 3(x-2)-5y=4 \\ 4x-3(y-2)=3x+8 \end{cases}$.

b) (5 puntos) Una persona coloca 20000 euros en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2% de interés compuesto durante 3 años. Determine los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.

EJERCICIO 5

En una urbanización se ha realizado un estudio sobre el número de personas que habitan en cada piso y se obtienen los siguientes datos

Personas	1	2	3	4	5
Pisos	20	60	52	35	18

a) (2 puntos) ¿Cuántos pisos hay en la urbanización?

b) (4 puntos) Determine la media y la moda de la distribución.

c) (4 puntos) Determine la varianza y la desviación típica de la misma.

EJERCICIO 6

La duración de un tipo de pilas alcalinas sigue una distribución Normal de media 55 horas y una desviación típica de 6 horas.

a) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure más de 53 horas.

b) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure entre 56 y 58 horas.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2012

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice y simplifique la fracción** $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ **.**

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

b) (5 puntos) **Calcule las derivadas de las siguientes funciones:**

$$f(x)=\frac{x}{3+x^2},\qquad g(x)=x(\ln x-1).$$

$$f'(x)=\frac{1\left(3+x^2\right)-2x\cdot x}{\left(3+x^2\right)^2}=\frac{3+x^2-2x^2}{\left(3+x^2\right)^2}=\frac{3-x^2}{\left(3+x^2\right)^2}.$$

$$g'(x)=\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x-1+1=\ln x$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **La ecuación de segundo grado** $x^2+px+7=0$ **tiene la solución** $x=-1$. **Determine** p **y la otra solución de la ecuación.**

Por ser $x=-1$ solución de la ecuación ha de satisfacerla, es decir que si se sustituye x por -1 en la ecuación, ésta debe cumplirse

$$\left(-1\right)^2+p\left(-1\right)+7=0\rightarrow 1-p+7=0\rightarrow 8-p=0\rightarrow p=8$$

Por tanto la ecuación sería

$$x^2+8x+7=0$$

Ésta es una ecuación de 2º grado, cuyas soluciones serían

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot7}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-8\pm6}{2}\qquad x_1=-1\quad x_2=-7.$$

Por tanto: $p=8$ y la otra solución es $x=-7$.

b) (5 puntos) **Sean A y B dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son** $P(A)=0.25$ y $P(B)=0.35$.
Calcule $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(A^C\cap B)$.

El enunciado nos dice que A y B son incompatibles, por tanto su intersección es el suceso imposible, cuya probabilidad es 0, es decir:

$$P(A\cap B)=P(\phi)=0$$

Sabemos que, en general,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.25+0.35-0=0.60.$$
$$P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.35-0=0.35.$$

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **Calcule** $4^{-1}+\frac{3}{5}\left(2-\frac{5}{3}\right)$ y $\frac{3}{4}:\frac{9}{2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$.

$$4^{-1}+\frac{3}{5}\left(2-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{4^1}+\frac{3}{5}\left(\frac{2\cdot3-5}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{3}{5\cdot3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5+4}{20}=\frac{9}{20}.$$

$$\frac{3}{4}:\frac{9}{2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}=\frac{3\cdot2}{4\cdot9}-\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^1}=\frac{6}{36}-\left(1:\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1\cdot6}{1}=\frac{1}{6}-6=\frac{1-36}{6}=-\frac{35}{6}.$$

b) (5 puntos) **Determine el valor del parámetro *a* para que la función**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+3x+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sea continua en *x*=1. Para *a*=0, determine los vértices de cada una de las parábolas.

Para que la función sea continua debe cumplirse que

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$$

$$f(1)=(1)^2-1+a=a$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=(1)^2-1+a=a$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=-(1)^2+3\cdot1+3=5\,.$$

Por tanto debe ser $a = 5.$

La primera parábola viene dada por la función $f(x) = x^2 - x.$

Su derivada, igualada a 0, nos daría la abscisa del vértice de la parábola:

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la función $f(x) = x^2 - x,\ x = \dfrac{1}{2}$, obtendríamos la ordenada del vértice:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\ .$$

Por tanto el vértice de la primera parábola sería el punto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right).$

En la segunda parábola, $f(x) = -x^2 + 3x + 3$, procediendo de forma análoga se obtendría como vértice el punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{21}{4}\right).$

EJERCICIO 4

a) (5 puntos) **Resuelva el sistema lineal** $\begin{cases} 3(x-2) - 5y = 4 \\ 4x - 3(y-2) = 3x + 8 \end{cases}.$

Operando, el sistema dado se transforma en otros equivalentes:

$$\begin{cases} 3x - 6 - 5y = 4 \\ 4x - 3y + 6 = 3x + 8 \end{cases} \to \begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

despejando x en la 2ª ecuación $x = 3y + 2$ y sustituyendo en la 1ª:

$$3(3y+2) - 5y = 10 \to 9y + 6 - 5y = 10 \to 4y = 4 \to y = \frac{4}{4} = 1$$

y como $x = 3y + 2 \to x = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

b) (5 puntos) **Una persona coloca 20000 euros en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2% de interés compuesto durante 3 años. Determine los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.**

Al finalizar el 1º año:

$$i_1 = \frac{20000 \cdot 2}{100} = 400$$

Al finalizar el 2º año:

$$i_2 = \frac{20400 \cdot 2}{100} = 408$$

Al finalizar el 3º año:

$$i_3 = \frac{20808 \cdot 2}{100} = 416.16$$

Por lo tanto, el capital final sería: 20000+400+408+416.16= 21224.16 euros.

El cálculo directo del capital final, podríamos obtenerlo, también, utilizando la fórmula del interés compuesto:

$$C_F = C_I \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 20000\left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 = 20000 \cdot (1.02)^3 = 20000 \cdot 1.061208 = 21224.16.$$

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) **En una urbanización se ha realizado un estudio sobre el número de personas que habitan en cada piso y se obtienen los siguientes datos**

Personas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pisos	**20**	**60**	**52**	**35**	**18**

i) (2 puntos) **¿Cuántos pisos hay en la urbanización?**

Del enunciado se desprende que la variable estadística X que se está estudiando es el número de personas que habitan en cada uno de los pisos de un conjunto de pisos observados, en concreto el número de pisos observados es la suma de la segunda fila de la tabla: 20+60+52+35+18=185.

Esta variable estadística toma los valores 1 con frecuencia absoluta 20, 2 con frecuencia 60, 3 con frecuencia 52, 4 con frecuencia 35 y, por último, la frecuencia absoluta del valor 5 es 18.

ii) (4 puntos) **Determine la media y la moda de la distribución.**

Disponiendo la tabla en la forma clásica y con la notación tradicional, efectuamos los cálculos previos necesarios para contestar a éste y al siguiente apartado:

Nº personas: X	Frec. Absol. n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	20	20	20
2	60	120	240
3	52	156	468
4	35	140	560
5	18	90	450
Sumas $\rightarrow$	**185**	**526**	**1738**

La media aritmética, $\bar{x}$, de la variable X, viene dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{526}{185} \cong 2.84$$

El valor modal de esa variable estadística, el de mayor frecuencia, es 2.

iii) (4 puntos) **Determine la varianza y la desviación típica de la misma.**

La varianza, s^2, de la variable X, viene dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{1738}{185} - 2.84^2 \cong 9.39 - 8.06 = 1.33$$

La desviación típica, *s*, es la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{1.33} \cong 1.15$$

EJERCICIO 6

La duración de un tipo de pilas alcalinas sigue una distribución Normal de media 55 horas y una desviación típica de 6 horas.

a) (5 puntos) **Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure más de 53 horas.**

Sea X la variable aleatoria "duración de un tipo de pilas alcalinas".

El enunciado dice que esa variable aleatoria X sigue una distribución Normal, $N(55, 6)$.

Si X sigue una ley Normal con esos parámetros, media 55 y desviación típica 6, la variable $Z = \frac{X-55}{6}$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1, cuyas probabilidades están tabuladas.

La pregunta formulada se puede expresar así:

$$P(X > 53) = P(\frac{X-55}{6} > \frac{53-55}{6}) = P(Z > -0.33) = 1 - P(Z > 0.33) = P(Z \leq 0.33) =$$
$$= 0.6293$$

b) (5 puntos) **Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure entre 56 y 58 horas.**

La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(56 \leq X \leq 58) = P\left(\frac{56-55}{6} \leq \frac{X-55}{6} \leq \frac{58-55}{6}\right) = P(0.16 \leq Z \leq 0.5) =$$

$$= P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq 0.16) = 0.6915 - 0.5636 = 0.1279.$$

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2013 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice las expresiones $\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$.

b) (5 puntos) Halle el conjunto de soluciones de la inecuación $-5\cdot(x+8)\geq\dfrac{(10+5x)}{3}$.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x)=\dfrac{(x^3+5x^2+6x-1)}{x+1}$.

b) (5 puntos) Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.

b) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x)=\ln(x^3)+\sqrt{x^4-3x^2+8}$.

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

X=Memoria	39	38.5	38	36.5
Y=Velocidad	100	90	80	65

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?

b) (4 puntos) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.

b) (5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto $x = 4$, de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x < 4 \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

b) (5 puntos) Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2013

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice las expresiones** $\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$.

$$\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{8-3}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{5}=$$

$$=\sqrt{8}+\sqrt{3}=\sqrt{2^3}+\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{3\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}=\frac{3\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18^2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2\cdot 3^2}}{18}=\frac{3\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) (5 puntos) **Halle el conjunto de soluciones de la inecuación**

$$-5\cdot(x+8)\geq\frac{(10+5x)}{3}.$$

$$-5\cdot(x+8)\geq\frac{(10+5x)}{3}\rightarrow -15\cdot(x+8)\geq(10+5x)\rightarrow -15x-120\geq 10+5x\rightarrow$$

$$\rightarrow -15x-5x\geq 10+120\rightarrow -20x\geq 130\rightarrow\frac{-20x}{-20}\leq\frac{130}{-20}\rightarrow x\leq-\frac{13}{2}$$

El conjunto de soluciones de la inecuación es el constituido por todos los números reales menores o iguales que -6.5 lo que también se puede expresar así

$$(-\infty,-6.5]$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x)=\dfrac{\left(x^3+5x^2+6x-1\right)}{x+1}$.

Aplicando la regla de derivación de un cociente

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+10x\ \ +6\right)\cdot\left(x+1\right)-1\cdot\left(x^3+5x^2+6x-1\right)}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^3+10x^2+6x+3x^2+10x+6-x^3-5x^2-6x+1}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+8x^2+10x+7}{\left(x+1\right)^2}$$

b) (5 puntos) **Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.**

Utilizando la fórmula del interés compuesto $C_t=C_0\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t$, donde C_t es el capital final al cabo de t años, C_0 es el capital inicial, r es el rédito anual y t es el tiempo transcurrido, en años,

$$8000=C_0\left(1+\frac{3}{100}\right)^8\rightarrow C_0=\frac{8000}{\left(1.03\right)^8}\cong\frac{8000}{1.26677}\cong 6315.27\ \text{euros.}$$

El interés obtenido al finalizar el primer año se puede obtener considerando interés simple,

$$i=\frac{C_0\cdot r\cdot t}{100}\rightarrow i=\frac{6315.27\cdot 3\cdot 1}{100}\cong 189.46$$

Por tanto al final del 1º año el capital obtenido sería 6315.27+189.46=6504.73.
Procediendo de forma similar para el 2º año se obtendría el siguiente interés

$$i=\frac{6504.73\cdot 3\cdot 1}{100}\cong 195.14$$

En conclusión, interés producido al finalizar el 1º año: 189.46, interés producido durante el 2º año 195.14, interés total producido en los dos primeros años 189.46+195.14=384.60.

El capital obtenido al finalizar los dos primeros años sería 6315.27+384.60=6699.87, cantidad que podría haberse obtenido utilizando interés compuesto a dos años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.**

En una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Entonces,

$$a_8 = a_1 + (8-1)\cdot d \rightarrow 128 = 100 + 7\cdot d \rightarrow 128 - 100 = 7\cdot d \rightarrow d = \frac{28}{7} = 4$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \rightarrow S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})\cdot 30}{2}$$

Calculando $a_{30} = 100 + 29\cdot 4 = 216$ y sustituyendo en la expresión anterior de la suma

$$S_{30} = \frac{(100 + 216)\cdot 30}{2} = 4740.$$

b) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x) = \ln(x^3) + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}$.

Se trata de derivar una suma en la que el 1º sumando es una función logaritmo neperiano y el 2º una raíz cuadrada,

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}} = \frac{3}{x} + \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}}.$$

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

X=Memoria	**39**	**38.5**	**38**	**36.5**
Y=Velocidad	**100**	**90**	**80**	**65**

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene por expresión

$$y-\bar{y}=r\frac{s_y}{s_x}\left(x-\bar{x}\right) \text{, ó también } \quad y-\bar{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}\left(x-\bar{x}\right)$$

donde r es el coeficiente de correlación lineal, que viene definido así $r=\frac{s_{xy}}{s_x s_x}$,

$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\bar{x}\cdot\bar{y}$ es la covarianza, $s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$ es la varianza de la variable X,

s_x, desviación típica de la variable X, es la raíz cuadrada de la varianza s_x^2, y, por último, $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ es la media aritmética de la variable X.

En la tabla siguiente se disponen los cálculos previos necesarios para la determinación de los parámetros anteriores:

X	Y	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
39	100	1521	10000	3900
38.5	90	1482.25	8100	3465
38	80	1444	6400	3040
36.5	65	1332.25	4225	2372.5
152	**335**	**5779.25**	**28725**	**12777.5**

$\bar{x}=\frac{152}{4}=38$; $\quad \bar{y}=\frac{335}{4}=83.75$; $\quad s_x^2=\frac{5779.25}{4}-38^2=1444.875-1444=0.875$

$s_x=\sqrt{0.875}\cong 0.935$; $\quad s_y^2=\frac{28725}{4}-83.75^2=7181.25-7014.0625\cong 167.19$;

$s_y=\sqrt{167.19}\cong 12.93$; $\quad s_{xy}=\frac{12777.5}{4}-38\cdot 83.75=3194.375-3182.5=11.875$

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es

$$y-83.75=\frac{11.875}{0.875}\left(x-38\right)$$

o en forma explícita $y=13.57x-431.91$.

La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable Y (velocidad) para valores de la variable X (memoria).

En concreto, para una memoria de 37.5 la velocidad estimada según el modelo anterior sería

$$y=508.875-431.91=76.965$$

b) (4 puntos) **Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_x} = \frac{11.875}{0.935 \cdot 12.93} = \frac{11.875}{12.08955} \cong 0.9822$$

Del valor del coeficiente de correlación lineal hay que tener en cuenta dos aspectos: su signo y su valor absoluto (el recorrido de valores de *r* va desde -1 a +1).

El signo nos indica si la relación es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) ó inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) pero no nos indica si la relación es intensa o débil.

La relación entre las dos variables, directa o inversa, es más fuerte cuanto más próximo a 1 es el valor absoluto de *r* y más débil cuanto más se acerque a 0.

En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más memoria más velocidad) muy intensa.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) **Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.**

Teniendo en cuenta que hay 10 piezas y, de ellas 3 son tuercas, la probabilidad de que la primera pieza extraída sea una tuerca es el cociente $\frac{3}{10} = 0.3$.

Se pueden formar $C_{10,2} = 45$ parejas posibles con las 10 piezas, extrayendo una y después otra y observando la composición de la pareja obtenida. De esas 45 parejas, $C_{3,2} = 3$ estarían constituidas por 2 tuercas; en consecuencia, la probabilidad de que las dos piezas extraídas sean tuercas es el cociente $\frac{3}{45} = \frac{1}{15} \cong 0.067$

b) (5 puntos) **Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto *x* = 4, de la función**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x < 4 \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea continua en $x = 4$ debe cumplirse que

$$\underset{x\to 4}{lím}\, f(x) = f(4)$$

$$f(4) = -(4)^2 + 9 \cdot 4 - 20 = -16 + 36 - 20 = 0$$

$$\underset{x\to 4^-}{lím}\, f(x) = (4)^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$$

$$\square\underset{x\to 4^+}{lím}\, f(x) = -(4)^2 + 9 \cdot 4 - 20 = 0^{\cdot}$$

Por tanto la función dada es continua en $x = 4$.

La función derivada de la función dada es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si } \; x < 4 \\ -2x + 9 & \text{si } \; x > 4 \end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ debe cumplirse que

$f'(4^-) = f'(4^+)$.

En caso de cumplirse la igualdad, éste sería el valor de $f'(4)$.

$$f'(4^-) = \underset{x\to 4^-}{lím}\, f'(x) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$f'(4^+) = \underset{x\to 4^+}{lím}\, f'(x) = -2 \cdot 4 + 9 = 1$$

En conclusión, existen derivadas laterales en $x = 4$ pero como son distintas la función no es derivable en $x = 4$.

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:
a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

Sea X la variable aleatoria "duración de una pila".

El enunciado dice que esa variable aleatoria X sigue una distribución Normal, $N(100,10)$.

Si X sigue una ley Normal con esos parámetros, media 100 y desviación típica 10, la variable $Z = \dfrac{X - 100}{10}$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1, cuyas probabilidades están tabuladas.

La probabilidad de que una pila, elegida al azar, de entre las de ese modelo tenga una duración inferior a 120 horas se puede expresar así:

$$P(X < 120) = P(\frac{X - 100}{10} > \frac{120 - 100}{10}) = P(Z < 2) = 0.9772.$$

En consecuencia, según este modelo, el 97.72% de las pilas tendría una duración inferior a 120 horas.

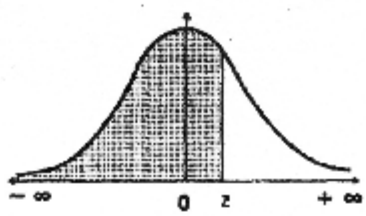
b) (5 puntos) **Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.**

La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(90 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{90 - 100}{10} \leq \frac{X - 100}{10} \leq \frac{110 - 100}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826.$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0;1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0;1), esté por debajo del valor z.

Prueba de acceso para mayores de 25 años
Curso 2017-2018
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

Ejercicio 1

a) (4 puntos) Simplifique la siguiente expresión:

$$2\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} - (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{5})^2$$

b) (6 puntos) Una bolsa contiene diez bolas blancas, siete rojas y tres negras. Se extraen al azar y de forma sucesiva tres bolas. Calcule la probabilidad de que la primera sea blanca y las dos siguientes negras en dos situaciones distintas: con reemplazamiento y sin reemplazamiento

SOLUCIÓN

a)

$$2\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} - (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{5})^2 = 2\frac{\sqrt{3\cdot 5^2}}{\sqrt{3}} - ((\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2) + 1 + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} =$$

$$= 2\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - (5-3) + 1 + 5 + 2\sqrt{5} = 10 - 2 + 6 + 2\sqrt{5} = 14 + 2\sqrt{5} = 2(7+\sqrt{5})$$

b) Denotando por "b" extraer bola blanca, "r" extraer bola roja y "n" extraer bola negra, tenemos:

Si es con reemplazamiento cada bola que se saca se devuelve a la urna y los sucesos extraer bola blanca y negra son independientes, verificándose:

$$P(b\cap n\cap n) = P(b)\cdot P(n)\cdot P(n) = \frac{10}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{20} = \frac{9}{800}$$

Si es sin reemplazamiento:

$$P(b\cap n\cap n) = P(b)\cdot P(n/b)\cdot P(n/b\cap n) = \frac{10}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18} = \frac{1}{114}$$

Ejercicio 2

a) (5 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2 & \text{si } x < 3 \\ \\ 3x - 8 & \text{si } x \geq 3 \end{cases},$$

halle el valor de a para que $f(x)$ sea continua. Para ese valor de a ¿es derivable en $x = 3$?

b) (5 puntos) El capital producido mediante interés compuesto anual del 5 % asciende, transcurridos 20 años, a 26533 euros ¿Cuál fue el capital inicial? ¿Qué intereses generó al cabo de los primeros diez años?

SOLUCIÓN

a) La función f está definida en $\mathbb{R}$. Claramente f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, por venir dada por funciones polinómicas. Estudiemos la continuidad en $x = 3$. Para que f sea continua en $x = 3$ se ha de verificar que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 8 = 1, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 3^2 + 3a - 2 = 7 + 3a, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 \cdot 3 - 8 = 1.$$

Por tanto, para que f sea continua en $x = 3$ se ha de verificar que $7 + 3a = 1$, de donde $a = -2$.

Para $a = -2$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x < 3 \\ \\ 3x - 8 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, luego $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 3 \\ \\ 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Como $f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = 4$, y $f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = 3$, por tanto existen las derivadas laterales, pero son distintas, en consecuencia para $a = -2$ la función f no es derivable en $x = 3$.

b) Utilizando la fórmula del interés compuesto, $C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$, donde C_t es el capital final al cabo de t años, C_0 es el capital inicial, r es el rédito anual y t es el tiempo transcurrido en años.

$$26533 = C_0 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} = C_0 \cdot (1.05)^{20},$$

por tanto

$$C_0 = \frac{26533}{(1.05)^{20}} \simeq \frac{26533}{2.6533} = 10000 \text{ euros}.$$

Los intereses son la diferencia entre el capital final obtenido en los primeros 10 años y el capital inicial desembolsado 10000 euros. Calculemos primero el capital final obtenido en los primeros 10 años:

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 10000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = 10000 \cdot (1.05)^{10} \simeq 16288.94 \text{ euros}.$$

Luego, los intereses generados al cabo de los primeros 10 años vienen dados por:

$$16288.94 - 10000 = 6288.94 \text{ euros}.$$

Ejercicio 3

a) (5 puntos) Resuelva la ecuación:

$$(2x-4)(2x+4)-12(x-2)=0.$$

b) (5 puntos) Calcule la derivada de la función:

$$f(x)=\frac{3x+7}{2x^2-1}+\operatorname{sen}(2x^3+3).$$

SOLUCIÓN

a)

$$(2x-4)(2x+4)-12(x-2)=4x^2-16-12x+24=4x^2-12x+8=0$$

Dividiendo por 4, nos queda la ecuación: $x^2-3x+2=0$.

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

Por tanto la solución de la ecuación es: $x_1=2,\ x_2=1$.

b)

$$f'(x)=\frac{3(2x^2-1)-4x(3x+7)}{(2x^2-1)^2)}+\cos(2x^3+3)6x^2=\frac{6x^2-3-12x^2-28x}{(2x^2-1)^2}+6x^2\cos(2x^3+3)=$$

$$=\frac{-6x^2-28-3}{(2x^2-1)^2}+6x^2\cos(2x^3+3).$$

Ejercicio 4

a) (4 puntos) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

b) (6 puntos) Las secciones de cadetes y juveniles de un club de fútbol están distribuidas por edades de la siguiente forma:

Edad (en años)	14	15	16	17	18
Número de jugadores	12	15	13	2	8

Determine las edades media y mediana, así como su desviación típica ¿Es simétrica la distribución de las edades?

SOLUCIÓN

a) Multiplicando la primera ecuación del sistema por 3, nos queda:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

Restándole a la primera ecuación la segunda, tenemos que $y = -3$. Sustituyendo este valor en la primera y despejando x, obtenemos: $x = 5$.

Solución: $x = 5, \ y = -3$.

b)

X	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
14	12	12	168	2352
15	15	27	225	3375
16	13	40	208	3328
17	2	42	34	578
18	8	50	144	2592
	50		779	12225

Las dos últimas columnas de la tabla anterior disponen los cálculos previos para determinar la media aritmética, $\overline{x}$, la varianza s^2 y la desviación típica s.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{779}{50} = 15.58$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{n} - \overline{x}^2 = \frac{12225}{50} - 15.58^2 = 244.5 - 242.7364 = 1.7636$$

$$s = \sqrt{1.7636} = 1.328$$

Como el número de datos es par, la mediana M, viene dada por la media aritmética de los datos que ocupan, una vez ordenados, los lugares centrales. En este caso, al haber 50 datos, debemos tomar los que ocupan los lugares 25 y 26. Mirando la tabla de frecuencias absolutas acumuladas, se deduce que $M = 15$. La distribución de las edades no es simétrica.

Ejercicio 5

La probabilidad de que un abonado a un operador de telefonía se dirija al servicio de atención al cliente es de 0.3. Tomados al azar 6 abonados de ese operador, calcule las siguientes probabilidades:

a) (5 puntos) Sólo uno no se ha dirigido al servicio de atención al cliente.

b) (5 puntos) Al menos uno se ha dirigido a dicho servicio.

SOLUCIÓN

a) Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0.3$, es decir $B(6; 0.3)$.

Si X es la variable aleatoria discreta que expresa el número de abonados que se dirigen al servicio de atención al cliente de los 6 abonados, la función de probabilidad de esta distribución viene dada por la expresión:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{6-k}$$

Por tanto,

$$P(X = 5) = \binom{6}{5} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7 = 0.0102$$

b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^6 = 1 - 0.1176 = 0.8823$$

Ejercicio 6

El tiempo de suscripción a una publicación sigue una ley Normal de media 200 días y desviación típica 25 días. Elegido un suscriptor al azar, halle las siguientes probabilidades:

a) (5 puntos) De que mantenga la suscripción más de 250 días.

b) (5 puntos) De que permanezca suscrito entre 175 días y 275 días.

SOLUCIÓN

a) Sea X la variable aleatoria "tiempo de suscripción a una publicación". Si X sigue una ley Normal de media 200 y desviación típica 25, la variable $\dfrac{X-200}{25} = Z$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1.

La probabilidad de que un suscriptor, elegido al azar, mantenga la suscripción más de 250 días se expresa así:

$$P(X > 250) = P\left(\frac{X-200}{25} > \frac{250-200}{25}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9773 = 0.0227$$

b) La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(175 \leq X \leq 275) = P\left(\frac{175-200}{25} \leq \frac{X-200}{25} \leq \frac{275-200}{25}\right) = P(-1 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \leq 3) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 3) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0.9987 - 1 + 0.8413 = 0.8400$$

Prueba de acceso para mayores de 25 años
Curso 2018-2019
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

Ejercicio 1

a) (4 puntos) Simplifique la siguiente expresión:

$$2\sqrt{8} + 7\sqrt{72} - 6\sqrt{18} + \sqrt{128} - 3\sqrt{50}$$

b) (6 puntos) Se lanzan dos dados y se suman sus caras superiores. Calcule la probabilidad de los sucesos "la suma es 8" y "la suma es múltiplo de 2".

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned} 2\sqrt{8} + 7\sqrt{72} - 6\sqrt{18} + \sqrt{128} - 3\sqrt{50} &= 2\sqrt{2^3} + 7\sqrt{2^3 \cdot 3^2} - 6\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2^7} - 3\sqrt{2 \cdot 5^2} \\ &= 4\sqrt{2} + 42\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) El espacio muestral estaría formado por las siguientes 36 parejas de resultados:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2)(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Estos resultados son equiprobables, por lo que la probabilidad de que se realice uno cualquiera de ellos es $\frac{1}{36}$.

Sea el suceso A "la suma es 8", la probabilidad de que la suma de las caras superiores sea 8 es $P(A) = \frac{5}{36}$, ya que esta suma sólo se presenta cuando se obtienen los resultados $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3)$ y $(6,2)$.

Sea el suceso B "la suma es múltiplo de 2", la probabilidad de que la suma de las caras superiores sea múltiplo de 2 se presenta cuando la suma de las caras superiores sea 2, 4, 6, 8, 10 y 12, por tanto tenemos que:

$$P(B) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2

a) (5 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \\ x^2+ax+9 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}.$$

Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=2$. Para ese valor de a, ¿es derivable en $x=2$?

b) (5 puntos) Al cabo de 6 años, el capital obtenido a un tanto de interés compuesto anual asciende a 17235 euros. Si el capital inicial fue 12500 euros, ¿cuál es el tipo de interés anual?, ¿qué intereses se generaron durante los tres primeros años?

SOLUCIÓN

a) Para que f sea continua en $x=2$ se ha de verificar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

$$f(2) = 2-1 = 1, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2-1 = 1, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2^2+2a+9 = 13+2a.$$

Por tanto, para que f sea continua en $x=2$ se ha de verificar que $13+2a=1$, de donde $a=-6$.

Para $a=-6$, $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \\ x^2-6x+9 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, luego $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ \\ 2x-6 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

Como $f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = 1$, y $f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = -2$, por tanto existen las derivadas laterales, pero son distintas, en consecuencia para $a=-6$ la función f no es derivable en $x=2$.

b) Utilizando la fórmula del interés compuesto, $C_t = C_0\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t$, donde C_t es el capital final al cabo de t años, C_0 es el capital inicial, r es el rédito anual y t es el tiempo transcurrido en años, se tiene que:.

$$17235 = 12500\left(1+\frac{r}{100}\right)^6,$$

por tanto

$$1+\frac{r}{100} = \left(\frac{17235}{12500}\right)^{1/6}, \quad \text{de donde} \quad r = 100\left[\left(\frac{17235}{12500}\right)^{1/6} - 1\right] \simeq 100\cdot 0.055 = 5.5\,\%.$$

Los intereses son la diferencia entre el capital final obtenido en los primeros 3 años y el capital inicial 12500 euros. Calculemos primero el capital final obtenido en los primeros 3 años:

$$C_t = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 12500\left(1+\frac{5.5}{100}\right)^3 = 12500\cdot(1.055)^3 \simeq 14678.017 \text{ euros}.$$

Luego, los intereses generados al cabo de los primeros 3 años vienen dados por:

$$14678.017 - 12500 = 2178.017 \text{ euros}.$$

Ejercicio 3

a) (5 puntos) Resuelva la ecuación:

$$(2x+1)^2 - (2x+1)(2x-1) = (x-1)^2 + 6x$$

b) (5 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{3x} + \sqrt{x^2+1}$$

SOLUCIÓN

a)

$$(2x+1)^2 - (2x+1)(2x-1) = (x-1)^2 + 6x$$
$$4x^2 + 1 + 4x - 4x^2 + 1 = x^2 + 1 - 2x + 6x$$
$$2 + 4x = x^2 + 4x + 1$$
$$x^2 - 1 = 0$$

Por tanto la solución de la ecuación es: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

b)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
$$g'(x) = 3e^{3x} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 3e^{3x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejercicio 4

a) (4 puntos) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

b) (6 puntos) La siguiente tabla proporciona el número de minutos dedicados a la lectura y el número de páginas leídas al día por 6 adultos:

X : Minutos	8	10	11	12	16	13
Y : Páginas	4	5	6	10	15	10

Calcule la recta de regresión que permite predecir el número de páginas leídas a partir de los minutos dedicados a la lectura. Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprételo ¿Cuántas páginas se estima que lea un adulto en 15 minutos?

SOLUCIÓN

a) Utilizamos, por ejemplo, el método de reducción, para ello multiplicamos la segunda ecuación del sistema por 3, quedándonos:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 9x + 3y = 21 \end{cases}$$

Sumando las 2 ecuaciones, tenemos que $11x = 33$, de donde $x = 3$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación y despejando y, obtenemos: $y = -2$.

$$\text{Solución: } x = 3, \ y = -2.$$

b) La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene la expresión $y - \overline{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$, donde $s_{xy} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x} \cdot \overline{y}$ es la covarianza, $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$ es la varianza de la variable X, s_x es la desviación típica de la variable X, y $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ es la media aritmética de la variable X.

Construimos la siguiente tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
8	4	64	16	32
10	5	100	25	50
11	6	121	36	66
12	10	144	100	120
16	15	256	225	240
13	10	169	100	130
70	50	854	502	638

$$\overline{x} = \frac{70}{6} = 11.66; \quad \overline{y} = \frac{50}{6} = 8.33; \quad s_x^2 = \frac{854}{6} - 11.66^2 \simeq 6.22; \quad s_x = \sqrt{6.22} \simeq 2.49;$$

$$s_y^2 = \frac{502}{6} - 8.33^2 \simeq 14.22; \quad s_y = \sqrt{14.22} \simeq 3.77; \quad s_{xy} = \frac{638}{6} - 11.66 \cdot 8.33 \simeq 9.11$$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 8.33 = \frac{9.11}{6.22}(x - 11.66)$$

o en forma explícita $y = 1.46x - 8.75$

La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable Y (páginas leídas) para valores de la variable X (minutos dedicados a la lectura).

El coeficiente de correlación lineal viene definido por: $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$, por tanto $r = \dfrac{9.11}{2.49 \cdot 3.77} \simeq 0.97$

El valor de r está siempre comprendido entre -1 y 1. Si el valor de r está próximo a -1 o a 1, entonces la dependencia lineal entre las dos variable es fuerte y si está próximo a 0 la dependencia lineal es débil. La dependencia lineal es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) si el valor del coeficiente es positivo e inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) si es negativo. En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más minutos más páginas leídas) muy intensa.

Las páginas que se estima que lea un adulto en 15 minutos son: $y(15) = 1.46 \cdot 15 - 8.73 = 13.17$ páginas.

Ejercicio 5

a) (4 puntos) El segundo término de una progresión geométrica es 3 y el quinto término es 24. Calcule la razón y la suma de los diez primeros términos.

b) (6 puntos) La probabilidad de que un vendedor realice una venta en una visita a un cliente es $p = 0.2$. En un día determinado realiza 8 visitas a sus clientes. Se pide:

b1) Probabilidad que en esas 8 visitas realice al menos una venta.

b2) Probabilidad de que ese día realice 3 ventas.

SOLUCIÓN

a) En una progresión geométrica el término enésimo y la suma de los n primeros términos cumplen respectivamente las igualdades:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = (a_1 \cdot r) \cdot r^{n-2} = a_2 \cdot r^{n-2}; \quad S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}.$$

Por tanto:

$$a_5 = a_2 \cdot r^3 \longrightarrow 24 = 3 \cdot r^3 \longrightarrow r^3 = 8 \longrightarrow r = 2$$

Como $a_2 = a_1 \cdot r$, se tiene que $a_1 = \frac{3}{2}$, luego,

$$S_{10} = \frac{3/2(2^{10} - 1)}{2-1} = \frac{3069}{2} = 1534.5$$

b) Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 8$ y $p = 0.2$, es decir $B(8; 0.2)$.

Si X es la variable aleatoria discreta que expresa el número de ventas que realiza el vendedor en esas 8 visitas, la función de probabilidad de esta distribución viene dada por la expresión:

$$P(X = k) = \binom{8}{k} \cdot 0.2^k \cdot 0.8^{8-k}$$

b1)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^8 = 1 - 0.1176 = 1 - 0.8^8 = 0.8322$$

b2)

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^5 = 0.1468$$

Ejercicio 6

a) (4 puntos) Resuelva la siguiente inecuación: $3x + 1 > \dfrac{2+4x}{3} - (2x-4)$

b) (6 puntos) El peso de los adultos que viven en una barriada es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media 75 kg. y desviación típica 3 kg. Se elige un adulto al azar de esa barriada. Se pide:

b1) Probabilidad de que pese menos de 78 kg.

b2) Probabilidad de que pese entre 69 y 81 kg.

SOLUCIÓN

a)

$$3x+1 > \frac{2+4x}{3} - (2x-4) \longrightarrow \frac{9x+3}{3} > \frac{2+4x-6x+12}{3} \longrightarrow 9x+3 > -2x+14 \longrightarrow 11x > 11 \longrightarrow x > 1$$

Se puede expresar el conjunto solución de forma equivalente como el intervalo $(1, +\infty)$.

b) Sea X la variable aleatoria "peso de los adultos que viven en una barriada". Si X sigue una ley Normal de media 75 y desviación típica 3, la variable $\dfrac{X-75}{3} = Z$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1.

b1) La probabilidad de que un adulto, elegido al azar, pese menos de 78 kg. es:

$$P(X < 78) = P\left(\frac{X-75}{3} < \frac{78-75}{3}\right) = P(Z < 1) = 0.8413$$

b2) La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(69 \leq X \leq 81) = P\left(\frac{69-75}{3} \leq \frac{X-75}{3} \leq \frac{81-75}{3}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$